הוכחת אופטימליות חמדנית באמצעות כלל ההחלפה

המדריך המעשי והסיסטמטי למעבר מאינטואיציה לריגורוזיות מתמטית

קורס תכנון אלגוריתמים | יחידת לימוד פדגוגית

המלכודת הפסיכולוגית של החמדן

החשש המוצדק של הסטודנט

כאשר אנו בוחרים בצעד חמדני, אנו מקבלים החלטה מקומית "קצרת רואי" מבלי להביט לאחור.

השאלה הפנימית שמטרידה כל מתכנת היא: **"האם בצעד הנוכחי סגרתי לעצמי דלתות קריטיות להמשך הדרך?"**

נקודת הכשל באינטואיציה

קשה מאוד להוכיח נכונות צעד-אחר-צעד מלמטה למעלה, מכיוון שההשפעה המצטברת של הבחירות היא כאוטית ולא צפויה.

על מנת להתגבר על החשש הזה, אנו זקוקים לכלי מנטלי ומתמטי חדש שיספק לנו מגן מוחלט: **כלל ההחלפה.**

הכירו את "פתרון האשף"

אסטרטגיית ההגנה התיאורטית

במקום לנסות להוכיח שאנחנו מושלמים מאפס, נשתמש בטקטיקה פילוסופית עמוקה:

נניח שקיים ישות עליונה, "אשף אלגוריתמים", שהביא לנו פתרון אופטימלי מושלם ומוחלט, שנסמן אותו באות O.

הפתרון של האשף הוא נקודת הייחוס שלנו. אם הפתרון שלנו זהה לשלו - ניצחנו. אם לא, אנו נאתגר אותו בשיטת **דו-קרב החלפות הדרגתי.**

נקודת המחלוקת הראשונה

מציאת נקודת הסטייה

נסרוק את הבחירות של הפתרון החמדני שלנו G מול פתרון האשף O.

נמצא את האיבר הראשון שבו האשף החליט אחרת מאיתנו. נסמן את הבחירה של האשף כ- o_i ואת הבחירה החמדנית שלנו כ- g_i.

אקט העימות הפדגוגי

כעת אנו פונים אל האשף ואומרים לו: **"בוא נבצע ניסוי קטן. נשמיט את הבחירה שלך o_i, ונכניס במקומה את הבחירה החמדנית שלנו g_i."**

ניתוח השפעת השינוי המקומי הזה הוא הלב הפועם של הוכחת האופטימליות.

תוצאת ההחלפה: משחק סכום אפס

הפתרון נהיה גרוע יותר?

אם ביצענו את ההחלפה ואיכות הפתרון פחתה, הרי שהאלגוריתם החמדני שלנו אכן נכשל והוא שגוי.

הפתרון נהיה טוב יותר?

בלתי אפשרי מתמטית! הנחת המוצא הרשמית היא שהאשף O הוא כבר אופטימלי, ולא ניתן לשפר את המושלם.

הפתרון נשאר אופטימלי!

זהו היעד שלנו! אנו מוכיחים מתמטית שהחלפת האיבר שלו בשלנו **לא פוגעת בחוקיות או בערך הפתרון**.

האינדוקציה כמכבש השמדת מחלוקות

הבטחת מחיקת ההבדלים לחלוטין

סטודנטים רבים שואלים: **"הוכחתם רק לצעד הראשון, מה עם העתיד?"**

כאן מגיע הניצחון הלוגי של האינדוקציה:

אנו מראים כי באמצעות שרשרת החלפות עוקבות, אנו מסוגלים להמיר את פתרון האשף המקורי O_0 לפתרון O_1, אז ל- O_2, עד ל- O_k שזהה לחלוטין לפתרון החמדני שלנו G, ללא אובדן איכות בדרך.

$O(k)$

צעדי החלפה הדרגתיים

ארבעת השלבים להוכחה מנצחת

- **שלב 1 - הגדרת הפתרונות:** נגדיר את פתרון האלגוריתם G ופתרון אופטימלי כלשהו O השונה ממנו.
- **שלב 2 - זיהוי הסטייה:** נצביע על האלמנט הראשון g_i ב- G שאינו מופיע ב- O.
- **שלב 3 - ביצוע ההחלפה:** נגדיר פתרון חדש O' ע"י החלפת איבר של האשף בצעד החמדני שלנו, ונוכיח שהשינוי שומר על חוקיות וערך הפתרון.
- **שלב 4 - סגירה אינדוקטיבית:** נסיק כי על ידי חזרה על הפעולה, ניתן להמיר את O ל- G מבלי לפגוע באופטימליות.

מקרה בוחן: בעיית בחירת פעילויות

הגדרת הבעיה: נרצה לבחור את תת-קבוצת הפעילויות הגדולה ביותר של אינטרוולים שאינם חופפים זה לזה בזמן.

הצעה חמדנית	מדוע היא נכשלת / מצליחה	דוגמה נגדית פשוטה להמחשה בכיתה
משך זמן קצר ביותר	נכשלת - פעילות קצרה עלולה לחסום שתי פעילויות ארוכות מצדדיה.	שלושה אינטרוולים: (0, 4), (3, 5), (4, 9). החמדן יבחר רק את האמצעי.
זמן התחלה מוקדם ביותר	נכשלת - פעילות שמתחילה מוקדם ויכולה להימשך זמן רב מאוד ולחסום הכל.	שני אינטרוולים: (0, 100), (1, 2). החמדן יבחר את הארוך ויפסיד את הקצר.
זמן סיום מוקדם ביותר (EFT)	**אופטימלי!** מפנה את המשאב מהר ככל הניתן להמשך הדרך.	מותיר תמיד מקסימום מרחב תמרון לפעילויות הבאות בתור.

ההחלפה בפועל בבחירת פעילויות

הוכחת חוקיות מתמטית

נסמן את הפעילות החמדנית הראשונה כ- g_1 ואת הראשונה של האשף כ- o_1.

מאחר שהאלגוריתם בחר ב- g_1 לפי כלל זמן הסיום המוקדם ביותר, מתקיים בהכרח:

$$f(g_1) \leq f(o_1)$$

מכיוון ש- g_1 מסתיימת לפחות באותו זמן או מוקדם יותר מ- o_1, החלפת o_1 ב- g_1 אינה יכולה ליצור חפיפה עם שאר פעילויות האשף!

תרשים ויזואלי של חפיפת אינטרוולים

התובנה הפדגוגית המרכזית

"אל תנסו להסביר מדוע הבחירה שלכם היא הכי טובה בעולם בצורה מנותקת. פשוט הראו שאין שום סיבה הגיונית להעדיף בחירה אחרת על פניה."

— הבסיס הלוגי שעומד מאחורי כלל ההחלפה

שאלות לסיעור מוחות בכיתה

מה קורה אם ישנם מספר פתרונות אופטימליים שונים? האם כלל ההחלפה עדיין תקף?

טיפ להוראה: השתמשו בלוח כדי להראות שכלל ההחלפה פשוט יקרב אתכם בהדרגה לאחד מהפתרונות האופטימליים הקיימים, מבלי לפגוע באיכותו.

נתראה בתרגיל הבא - נסו להחיל את כלל ההחלפה על בעיית תרמיל הגב השברי!

Image Sources

https://i.ytimg.com/vi/nUShpavQae8/maxresdefault.jpg

Source: www.youtube.com